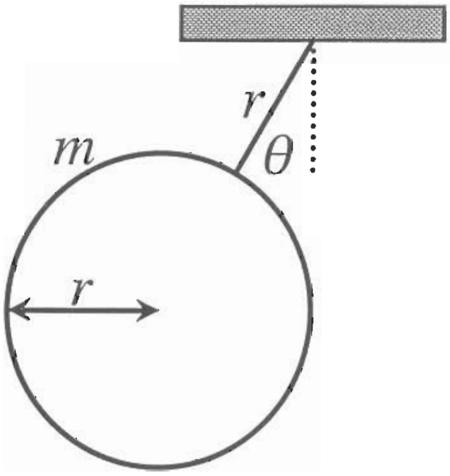
TENTAMEN MECHANICA 16-03-2001

Maak elke opgave op een apart vel, voorzien van je naam.
Op vel 1: naam, studentnummer, adres, postcode, woonplaats en studierichting.
De onderdelen van een opgave zijn meestal onafhankelijk van elkaar op te lossen. Als je een bepaald onderdeel niet kunt oplossen probeer dan toch het vervolg van de opgave.

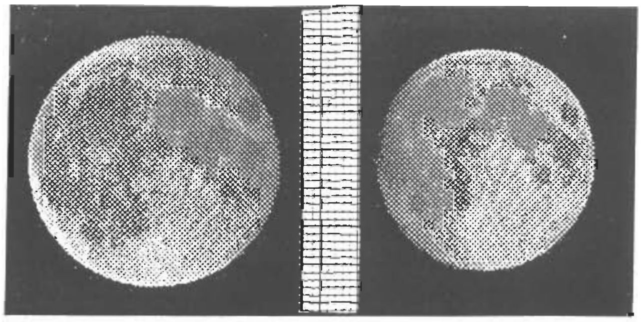


1. Een dunne schijf met een straal $r = 3$ cm en een massa van 0,5 kg hangt aan een massaloos touwtje met lengte r. De schijf wordt uit de evenwichstoestand gehaald en het ophangtouwtje krijgt dan een uitwijking θ. Zie de tekening hiernaast.

   a. Bereken de slingertijd van de schijf aan het touwtje als we ervan uitgaan dat de massa geconcentreerd zit in het massamiddelpunt.
   b. Bereken het traagheidsmoment van de schijf ten opzichte van het massamiddelpunt.
   c. Stel de Lagrangiaan op.
   d. Bereken de slingertijd voor kleine oscillaties.

   De nu berekende slingertijd wijkt af van het bij a. gevonden antwoord.

   e. Geef een fysische verklaring voor het verschil.
   f. Maak een listing in PSI waarmee de x en y coördinaten van het massamiddelpunt gesimuleerd kunnen worden.



2. Hiernaast zie je twee foto's van de maan. Links staat de maan in het perigeum en rechts in het apogeum. Uit het verschil in grootte blijkt dat de baan van de maan om de aarde een beetje elliptisch is. Bij het beantwoorden van de vragen houden we geen rekening met de gereduceerde massa.

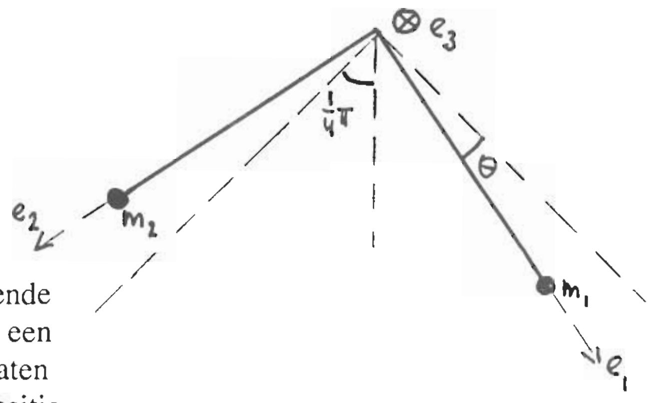
   Gegeven: massa van de aarde $= 5{,}976 . 10^{24}$ kg
   massa van de maan $= 0{,}074 . 10^{24}$ kg
   gravitatieconstante $= 6{,}673 . 10^{-11}$ N.m².kg²
   één maanmaand $= 27{,}32$ dagen

   a. Toon aan dat door geen rekening te houden met de gereduceerde massa in een centraal krachtenveld we een fout maken in de maanmassa van meer dan 1%.
   b. Bereken, uitgaande van de formule voor cirkelvormige banen, de straal van de maanbaan.

   We nemen nu aan dat de straal van de maanbaan de halve lange as is van de werkelijke ellipsvormige baan van de maan. Neem indien vraag b niet is beantwoord: $a = 3{,}80 . 10^8$ m.

   c. Bereken uit de schijnbare afmetingen van de maan de excentriciteit van de ellips. Geef aan welke benadering je hierbij maakt.
   Het oppervlak van een ellips met halve lange as a en excentriciteit ϵ is: $A = \pi a^2 \sqrt{(1 - \epsilon^2)}$.
   d. Bereken het impulsmoment L van de maan.
   e. Bereken de snelheid van de maan in het perigeum. Indien het antwoord op vraag d ontbreekt neem dan voor het impulsmoment van de maan: $L = 3{,}00 . 10^{34}$ kg.m²/s.

3. Twee staven met ieder een lengte van b meter zijn onder een hoek van 90° met elkaar verbonden. We verwaarlozen de massa van de beide staven. Het hoekpunt is tevens ophangpunt voor een slinger. Aan het eindpunt van beide staven is een massa m bevestigd. Het geheel vormt nu een slinger met een zeker traagheidsmoment. De armen van de stilhangende slinger maken met de verticaal door het ophangpunt een hoek van $^1/_4\pi$ radialen. Vanuit de evenwichtsstand laten we de armen een kleine hoek θ maken met de rustpositie. Het systeem gaat daardoor slingeren. Kies de e_1-as langs de rechterarm en de e_2-as langs de linkerarm. Daarmee ligt ook de richting van de e_3-as vast.



De elementen van de traagheidstensor kunnen bepaald worden met de volgende relatie:

$$I_{ij} = \Sigma_\alpha m_\alpha (\delta_{ij} \Sigma_k x^2_{\alpha,k} - x_{\alpha,i} . x_{\alpha,j})$$

a. Bereken de elementen van de traagheidstensor van de hierboven beschreven slinger.
b. Toon aan dat het impulsmoment gelijk is aan $L_3 = 2m.b^2.\dot{\theta}.e_3$.
c. Bereken het krachtmoment op deze slinger.
d. Bereken de ω_0 van de optredende slingeringen.

4. Als je met een vinger op een knikker drukt, die op een horizontale vloer ligt, kun je de knikker zodanig 'wegschieten' dat hij op een gegeven moment stopt en weer terugrolt. De straal van de knikker is r en zijn massa is m. Het traagheidsmoment van een homogene knikker is $I = {}^2/_5\, mr^2$.
De lineaire snelheid aan het begin is v en aan het eind u (tegengesteld gericht aan de beginsnelheid). Bij het wegschieten heeft de knikker bovendien een ω_0 die een zodanige richting heeft dat de knikker na verloop van tijd gaat terugrollen.
a. Toon aan dat ω_0 gelijk is aan $(5v + 7u)/2r$.

De kinetische energie aan het begin wanneer de knikker weggeschoten wordt is niet gelijk aan de kinetische energie vlak na het omkeren van de bewegingsrichting.
b. Bereken de verandering in de kinetische energie van de knikker.

De wrijvingscoëfficiënt tussen knikker en grond is μ. We nemen aan dat de arbeid verricht door de wrijvingskracht volledig verantwoordelijk is voor de verandering in de kinetische energie.
c. Toon aan dat de weg die de knikker in de oorspronkelijke richting aflegt gelijk is aan:

$$s = \frac{7\,(v+u)^2}{4\mu g}$$

5. Een massieve cilinder en een holle cilinder rollen van een schuine helling omlaag. De holle cilinder is langzamer dan de massieve als:
a. De massa's van beide cilinders gelijk zijn
b. De stralen van beide cilinders gelijk zijn
c. Zowel de massa's als de stralen gelijk zijn
d. Er willekeurige massa's en stralen gekozen worden.
Geef een duidelijke uitleg bij de keuze van je antwoord.

Puntenverd.: 1, a2, b2, c2, d2, e2, f2; 2, a2, b2, c2, d2, e2; 3, a3, b2, c2, d2; 4, a3, b3, c3; 5, 5.